



University of Gonabad

# Fluid Mechanics II

Dr. Vahid Mahmoudi

Assistant Professor,  
Department of Chemical Engineering,  
University of Gonabad



## فهرست مطالب درس مکانیک سیالات ۲

- فصل اول: جریان های داخلی (جریان درون لوله ها و کانال ها)
- فصل دوم: توربوماشین ها
- فصل سوم: جریان عبوری از بستر ذرات جامد
- فصل چهارم: جریان های لایه مرزی
- فصل پنجم: سیال تراکم پذیر

# فصل اول: جریان های داخلی



## جریان درون لوله ها



The Alaska Pipeline



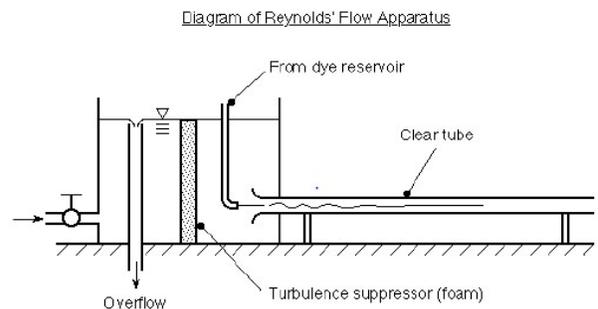
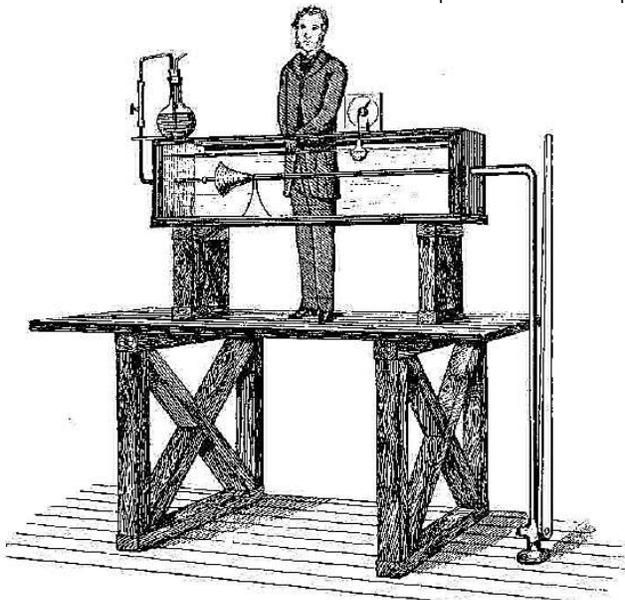
## یادآوری

- جریان غیرویسکوز (Inviscid flow): در این نوع جریان، ویسکوزیته تأثیری در جریان ندارد یا قابل صرفنظر کردن است.
- این حالت وقتی پیش می آید که مقدار تنش برشی نسبت به نیروهای دیگر بسیار کم باشد. در این حالت کافی است در معادلات مقدار ویسکوزیته را برابر صفر قرار دهیم.
- در حالت کلی همه سیالات به هر حال ویسکوزیته دارند، ولی مثلاً در جریانهای خارجی که روی سطوح اتفاق می افتد، می توان فرض کرد که اثر ویسکوزیته قابل صرفنظر کردن است.
- جریان ویسکوز (Viscous flow): در این جریان از اثرات ویسکوزیته نمی توان صرفنظر کرد و تنش برشی باید در نظر گرفته شود.
- مثلاً در لایه مرزی باید ویسکوزیته را در نظر گرفت و یا در جریان درون لوله ها. دلیل این مساله این است که به دلیل وجود نیروهای ویسکوز، سیال به جداره می چسبد.
- در جریان ویسکوز هدر رفتن انرژی داریم.

5

## یادآوری

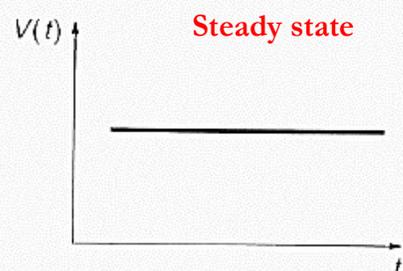
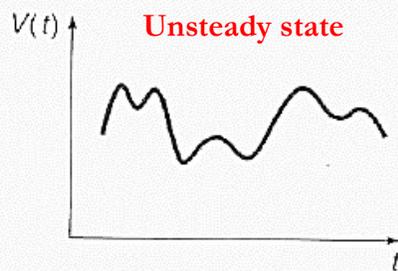
- نخستین بار دانشمندی به نام رینولدز به مطالعه رفتار جریان ها پرداخت.
- انواع جریان های ویسکوز: جریان آرام، جریان درهم



6

## یادآوری

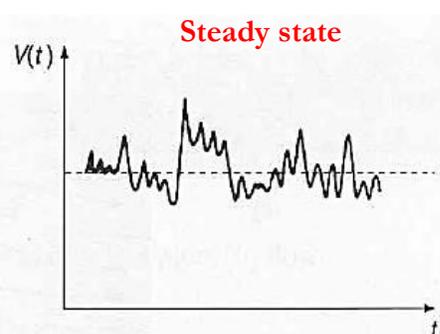
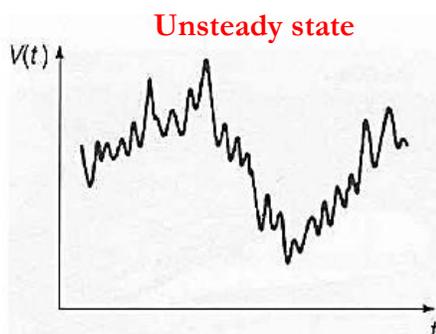
▪ در جریان آرام (laminar) ذره سیال در حال حرکت با ذرات اطراف خود مخلوط نمی شود.



7

## یادآوری

▪ در جریان درهم یا آشفته (turbulent) ذرات سیال حرکات نامنظم دارند و مقادیر فشار و سرعت بطور اتفاقی تغییر می کنند.



8

## یادآوری

- پارامترهای مهم در تعیین نوع رژیم جریان عبارتند از:
- بُعد مشخصه: اگر این پارامتر زیاد باشد احتمال درهم بودن جریان بیشتر است. تعریف این بُعد در سیستم های مختلف متفاوت است. مثلاً این بُعد در سیستم جریان در لوله، همان قطر لوله است.
- سرعت (متوسط) جریان: اگر سرعت جریان بیشتر باشد، جریان درهم می شود.
- دانسیته جریان: هر چه دانسیته سیال بیشتر باشد احتمال رسیدن به رژیم درهم بیشتر می شود و بالعکس.
- ویسکوزیته دینامیک: اگر کمتر باشد، جریان درهم می شود.
- عدد رینولدز (Re) پارامتری است که به طور کمی تعیین کننده رفتار جریان است. **بعد عدد رینولدز؟؟؟**

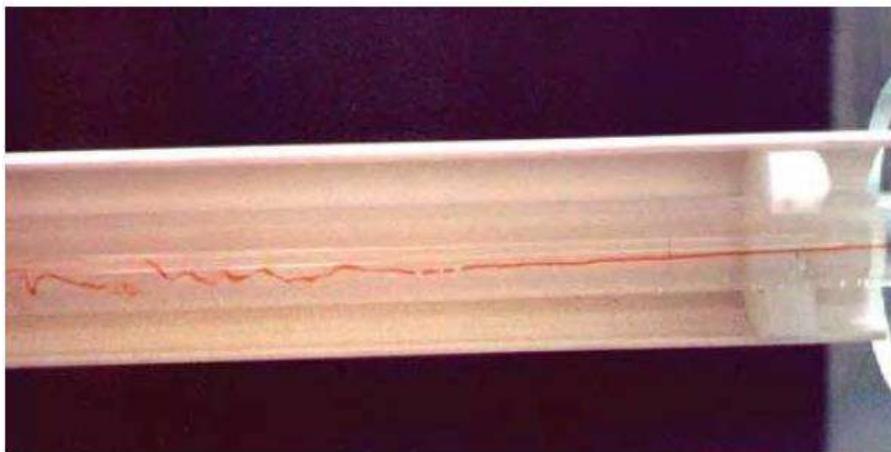
$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{u D}{\nu}$$

- اگر Re کم باشد جریان آرام و اگر Re زیاد باشد جریان درهم است...!

9

## یادآوری

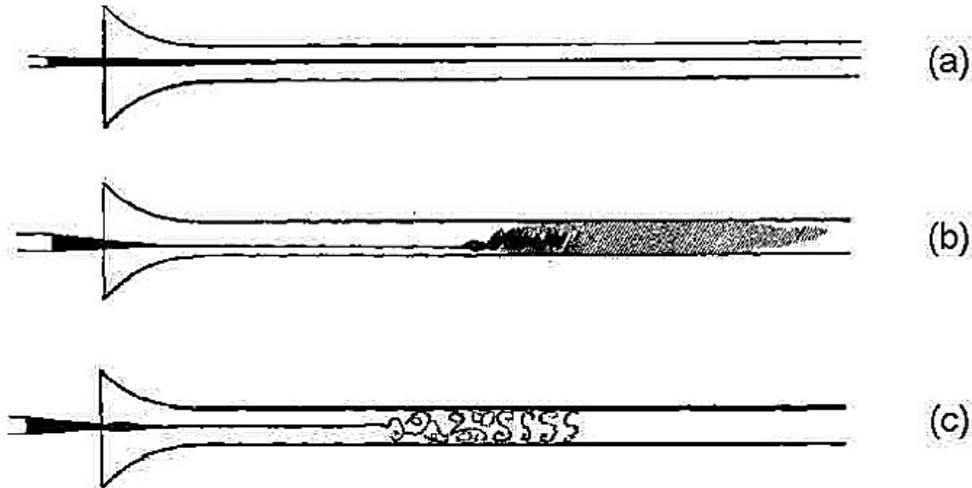
- برای مثال، در جریان درون لوله ها، در مقادیر  $Re < 2100$  جریان آرام و در مقادیر  $Re > 4000$  جریان درهم در نظر گرفته می شود.
- اگر  $2100 < Re < 4000$  باشد، جریان ناپایدار یا واسطه خواهد بود.



10

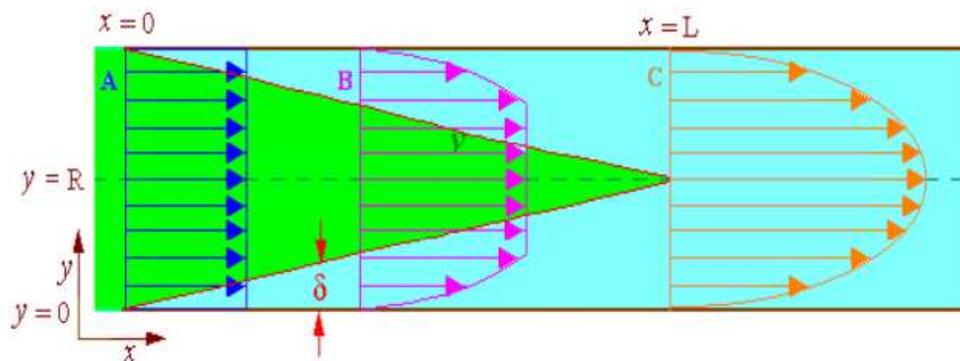
## یادآوری

- برای مثال، در جریان درون لوله ها، در مقادیر  $Re < 2100$  جریان آرام و در مقادیر  $Re > 4000$  جریان درهم در نظر گرفته می شود.
- اگر  $4000 > Re > 2100$  باشد، جریان ناپایدار یا واسطه خواهد بود.



11

## جریان در لوله ها



$\delta$  = Boundary layer thickness  
 $R$  = Radius of pipe  
 $L$  = Transition length  
 $v$  = Velocity

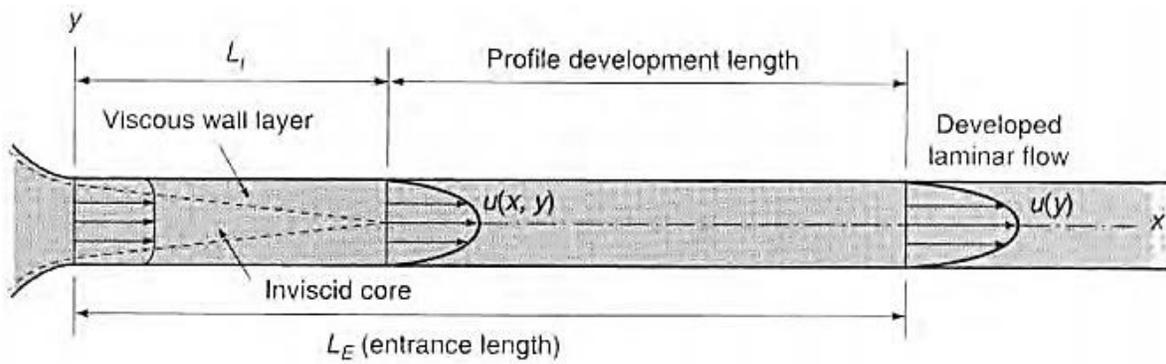
Potential flow regime

Boundary layer flow

Development of boundary-layer flow in pipe

12

## جریان در لوله ها



▪ ناحیه ورودی هیدرودینامیکی

- برای جریان آرام:

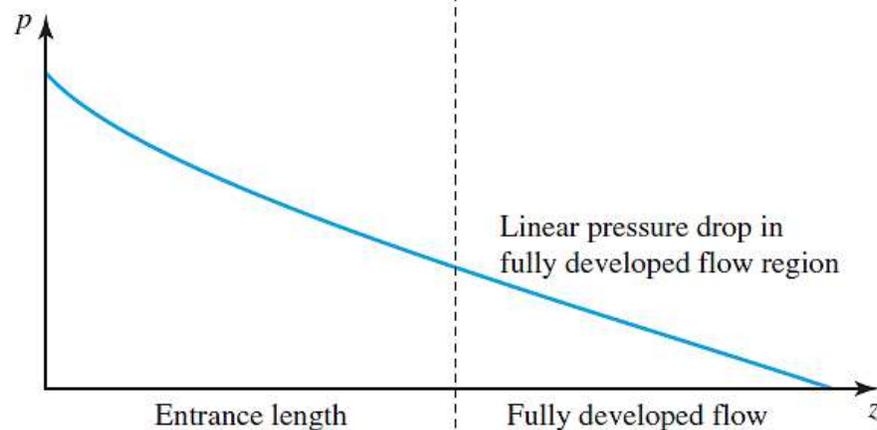
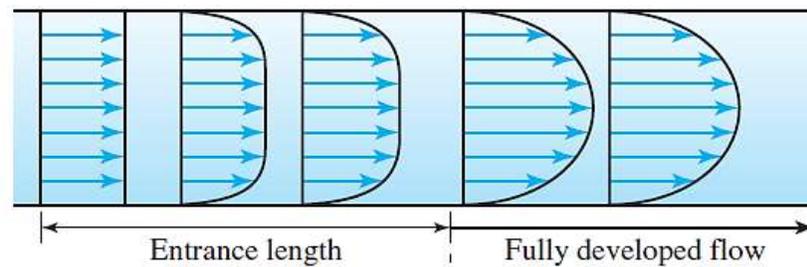
$$\frac{L_E}{D} = 0.058 Re$$

- برای جریان درهم:

$$\frac{L_E}{D} = 4.4 Re^{1/6}$$

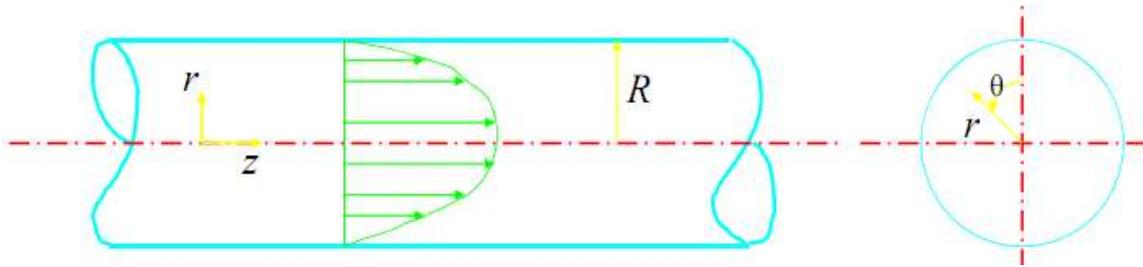
13

## جریان در لوله ها



14

## حل معادله ناویه-استوکس (جریان کاملا توسعه یافته)



$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g$$

▪ فرم کلی معادلات ناویه-استوکس (یادآوری)

▪ معادله ناویه استوکس در مختصات استوانه ای

$$\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

15

## حل معادله ناویه-استوکس (جریان کاملا توسعه یافته)

▪ برای سادگی فرض می کنیم لوله افقی باشد، اما اگر لوله زاویه دار هم می بود فقط باید به جای P، در معادلات بعدی از P+ρgh استفاده شود.

▪ معادله ساده شده عبارت است از

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)$$

▪ از آن جا که  $V_z = V_z(r)$  می باشد، می توان گفت در جریان توسعه یافته مقدار  $\frac{\partial P}{\partial z}$  ثابتی خواهد بود.

$$\frac{\partial P}{\partial z} = cte = \frac{\Delta P}{L}$$

▪ با ادامه انتگرال گیری داریم

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Delta P}{L} r$$

16

### حل معادله ناویه-استوکس (جریان کاملاً توسعه یافته)

ادامه انتگرال گیری  $\Rightarrow r \frac{dV_z}{dr} = \frac{\Delta p}{2\mu L} r^2 + A \Rightarrow \frac{dV_z}{dr} = \frac{\Delta p}{2\mu L} r + \frac{A}{r}$

$\Rightarrow \frac{dV_z}{dr} = \frac{\Delta p}{2\mu L} r + \frac{A}{r} \Rightarrow V_z = \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + A \ln r + B$

برای تعیین ثوابت A و B باید دو شرط را اعمال کنیم.

B.C.1:  $r=0, \frac{dV_z}{dr} = 0 \Rightarrow A=0$

B.C.2:  $r=R, V_z = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} + B \Rightarrow B = -\frac{\Delta p R^2}{4\mu L}$

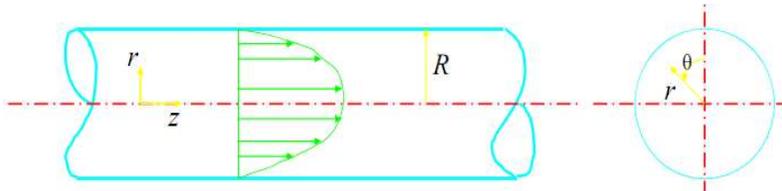
پس داریم

$$V_z = \frac{\Delta p}{4\mu L} (r^2 - R^2) = \frac{R^2}{4\mu} \left( -\frac{\Delta p}{L} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

17

### حل معادله ناویه-استوکس (جریان کاملاً توسعه یافته)

سوال: سرعت ماکزیمم چه مقدار خواهد بود؟؟؟



سوال: سرعت متوسط در لوله چقدر است؟

18

## ضریب اصطکاک (Friction Factor)

▪ ضریب اصطکاک فانیگ

$$\text{Fanning} : f_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V^2} \Rightarrow \tau_w = \frac{1}{2} f_F \rho V^2$$

$$\tau_w = -\mu \left. \frac{dV_z}{dr} \right|_{r=R} \quad \text{▪ می دانیم}$$

$$\Rightarrow \tau_w = \frac{R}{2} \left( -\frac{\Delta P}{L} \right) = \frac{1}{2} f_F \rho V^2$$

$$V_z = \frac{\Delta P}{4\mu L} (r^2 - R^2)$$

▪ در نتیجه

$$\Rightarrow -\Delta p = f_F \frac{L}{R} \rho V^2$$

ضریب اصطکاک مودی:  $f$

▪ و در نهایت

$$h_f = \frac{-\Delta p}{\rho g} = \boxed{4f_F} \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = f \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

19

## معادله دارسی-وایسباخ

▪ طبق ضریب اصطکاک مودی ( $f$ ) داریم

$$h_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

▪ از طرفی

$$\bar{V}_z = V = \frac{R^2}{8\mu} \frac{(-\Delta p)}{L}$$

▪ در نتیجه

$$\Rightarrow h_f = \frac{-\Delta p}{\rho g} = \frac{32\mu L V}{\rho g D^2}$$

▪ پس می توان گفت

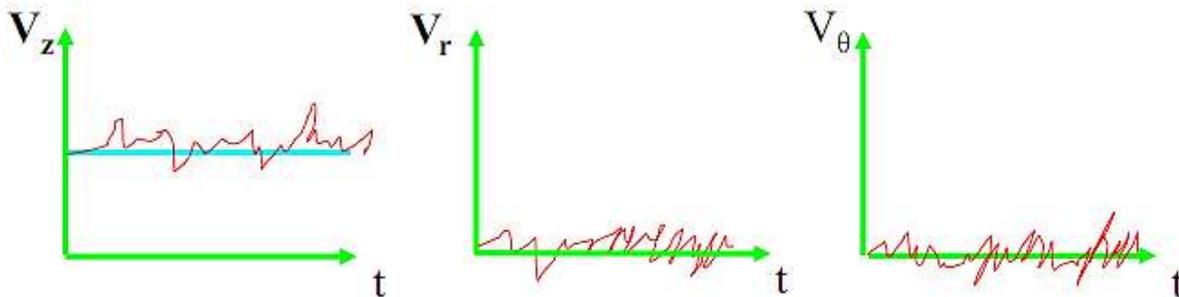
$$f \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \frac{32\mu L V}{\rho g D^2} \Rightarrow f = \frac{64\mu}{\rho V D} = \boxed{\frac{64}{\text{Re}}}$$

برای جریان آرام

20

## جریان درهم در لوله ها

- در اعداد رینولدز بالا، رژیم جریان تبدیل به آشفته می شود. از آن جا که بسیاری از رژیم های جریانی در انتقال سیالات از نوع آشفته است، این جریان از نظر عملیاتی اهمیت بالایی دارد.
- در جریان آشفته، مولفه سرعت در هیچ کدام از جهات صفر نیست.

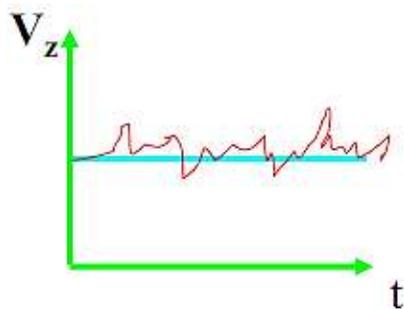


21

## جریان درهم در لوله ها

- در جریان درهم می توان نوشت

$$V = \bar{V} + V'$$



- برای تعیین  $\bar{V}$  می توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt$$

**T باید به اندازه کافی بزرگ باشد.**

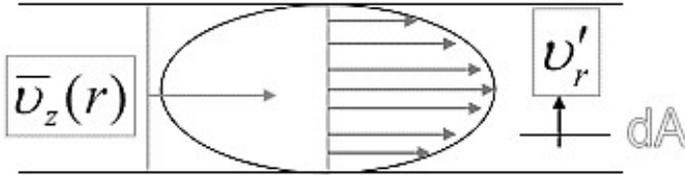
$$\bar{V}_r = \bar{V}_\theta = 0$$

می دانیم در جریان توسعه یافته

22

## جریان درهم در لوله ها

- ادی (Eddy): به تعداد زیادی از مولکول های سیال که به صورت یک ذره واحد باهم حرکت می کنند ادی گفته می شود.



- در یک لحظه، یک ادی سطح مقطع  $dA$  را قطع کرده و به لایه ای با سرعت بالاتر می رود. این پدیده باعث می شود سرعت لایه بالاتر از خود را برای لحظه ای کاهش دهد (و به طور بالعکس).

- نیروی ناشی از این حرکت ناگهانی (نیرو در جهت  $z$ ) عبارت است از

$$dF = -\rho V_r' dA V_z'$$

23

## جریان درهم در لوله ها

- دلیل علامت منفی این است که انتقال ادی ها اثر (معکوس) بر روی اندازه حرکت دارد.

$$dF = -\rho V_r' dA V_z'$$

- با توجه به رابطه تنش می توان نوشت

$$\tau_{turb.} = \frac{dF}{dA} = \frac{-\rho V_r' dA V_z'}{dA} = -\rho V_r' V_z'$$

- از آن جا که  $V_r'$  مثبت باعث  $V_z'$  منفی شده و  $V_r'$  منفی باعث  $V_z'$  مثبت می شود،  $\tau_{turb.}$  همواره مثبت خواهد بود.

- در نتیجه می توان گفت تنش برشی ظاهری عبارتست از

$$\bar{\tau}_{turb.} = -\rho \overline{V_r' V_z'}$$

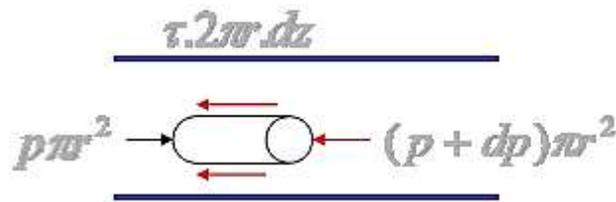
- و تنش برشی کل به صورت زیر خواهد بود

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_{lam.} + \bar{\tau}_{turb.} = -\mu \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial r} - \rho \overline{V_r' V_z'}$$

24

## رابطه تنش برشی با گرادیان فشار

با در نظر گرفتن یک المان از سیالی که در درون لوله قرار دارد



از آن جا که حرکت سیال بدون شتاب و یکنواخت (با سرعت ثابت است):

$$\sum dF = 0 \Rightarrow p \pi r^2 - (p + dp) \pi r^2 - \tau \cdot 2 \pi r dz = 0$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{d\bar{p}}{dz} = \mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \overline{V_r' V_z'}$$

در حالت توسعه یافته،  $\frac{d\bar{p}}{dz}$  ثابت است و اگر  $\overline{V_r' V_z'}$  را به صورت تابعی از  $r$  در نظر بگیریم، می توان پروفیل سرعت را به دست آورد.

25

## رابطه تنش برشی با گرادیان فشار

برای  $\overline{V_r' V_z'}$  از مفهومی به نام لزجت گردابی یا eddy viscosity استفاده کرده و رابطه زیر را تعریف می کنیم:

$$\overline{V_r' V_z'} = -\eta \frac{d\bar{V}_z}{dr}$$

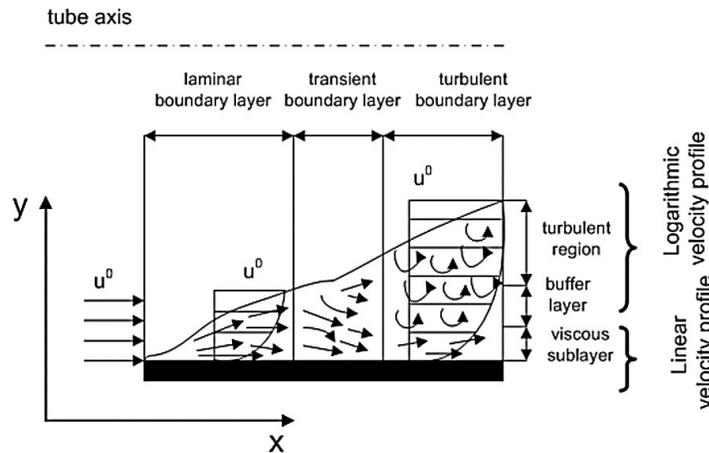
برخلاف لزجت دینامیک ( $\mu$ ) که یک خاصیت ذاتی سیال است، لزجت گردابی به رژیم جریانی هم بستگی دارد.

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \frac{d\bar{p}}{dz} = \rho (v + \eta) \frac{d\bar{V}_z}{dr}$$

از آن جا که تعیین لزجت گردابی ( $\eta$ ) به روش های تحلیلی امکان پذیر نیست از این معادله نمی توان استفاده کرد. راه دیگر به کارگیری روش های تجربی برای تعیین توزیع سرعت سیال در جریان آشفته می باشد.

26

## زیرلایه آرام



- در ناحیه بسیار نزدیک به سطح ساکن، به دلیل اثرات سطحی و عدم لغزش ذرات چسبیده به سطح، زیرلایه ای از سیال وجود دارد که به دلیل سرعت بسیار کم به صورت لایه لایه (جریان آرام) خواهد بود که به این ناحیه، زیرلایه ویسکوز یا viscous sublayer گفته می شود.
- زیرلایه ویسکوز بسیار کوچک بوده و جریان در این ناحیه به صورت لایه ای است. تنها تنش موثر، تنش ویسکوز بوده و ادی ها در این ناحیه خیلی کم هستند.
- لایه بافر (buffer layer) نیز بسیار نازک بوده و در این لایه، هم تنش ویسکوز و هم ادی ها موثر هستند.

27

## توزیع عمومی سرعت در جریان درهم

- ابتدا برای تعیین توزیع سرعت، اعداد بدون بُعد زیر را تعریف می کنیم:
- سرعت اصطکاکی

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

- سرعت بدون بُعد

$$u^+ = \frac{V_z}{u^*}$$

- فاصله از جداره لوله

$$y = R - r$$

- فاصله بدون بُعد

$$y^+ = \frac{yu^* \rho}{\mu}$$

28

## توزیع عمومی سرعت در جریان درهم

▪ در ناحیه زیر لایه ویسکوز می توان نوشت

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \tau_w$$

▪ از طرفی

$$\frac{du^+}{dy^+} = 1 \Rightarrow u^+ = y^+ + c$$

▪ برای تعیین ثابت c نیاز به یک شرط مرزی داریم:

$$B.C. : y^+ = 0, u^+ = 0 \Rightarrow u^+ = y^+$$

▪ برای ناحیه درهم خارجی هم می توان شکل کلی معادله را به کمک فرضیاتی به دست آورد:

$$u^+ = A \ln y^+ + B$$

ثوابت به صورت تجربی تعیین می شوند

▪ برای لایه بافر هم همان فرمت لایه درهم خارجی در نظر گرفته می شود (ثابت های معادله متفاوت خواهند بود).

29

## توزیع عمومی سرعت در جریان درهم

▪ رابطه قبل به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = f(\tau_0, \rho, y)$$

▪ تنها ترکیبی از این متغیرها که بُعد لازم را به دست می دهد به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{v^*}{k} \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow \bar{v}_x = \frac{v^*}{k} \ln y + \lambda'$$

$$\frac{\bar{v}_x}{v^*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{y v^*}{v}\right) + \lambda$$

30

## توزیع عمومی سرعت در جریان درهم

▪ در نهایت در سه ناحیه متفاوت خواهیم داشت

- زیرلایه ویسکوز

$$y^+ < 5$$

$$u^+ = y^+$$

- لایه بافر

$$5 < y^+ < 30$$

$$u^+ = 5.00 \ln y^+ - 3.05$$

- ناحیه آشفته

$$30 < y^+$$

$$u^+ = 2.5 \ln y^+$$

31

## توزیع عمومی سرعت در جریان درهم

▪ روش دیگر این است که از توزیع سرعت قانون توانی استفاده کنیم:

$$\frac{\bar{V}}{V_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

▪ مقدار  $n$  نیز بر مبنای جدول زیر به دست می آید

Re	$4 \times 10^3$	$10^5$	$10^6$	$> 2 \times 10^6$
$n$	6	7	9	10

32

## محاسبه افت فشار در لوله ها

- قبلاً از طریق معادله دارسی-وایسباخ، رابطه بین سرعت متوسط سیال و میزان افت اصطکاکی در لوله را دیده ایم.

$$h_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

- در این بخش، هدف تعیین مقدار ضریب  $f$  می باشد.

- نشان داده شده است که میزان افت فشار در لوله ( $\Delta P$ ) به پارامترهایی مانند دانسیته و ویسکوزیته سیال، قطر لوله، سرعت متوسط سیال و زبری لوله بستگی دارد.

- با استفاده از آنالیز ابعادی می توان نتیجه گرفت

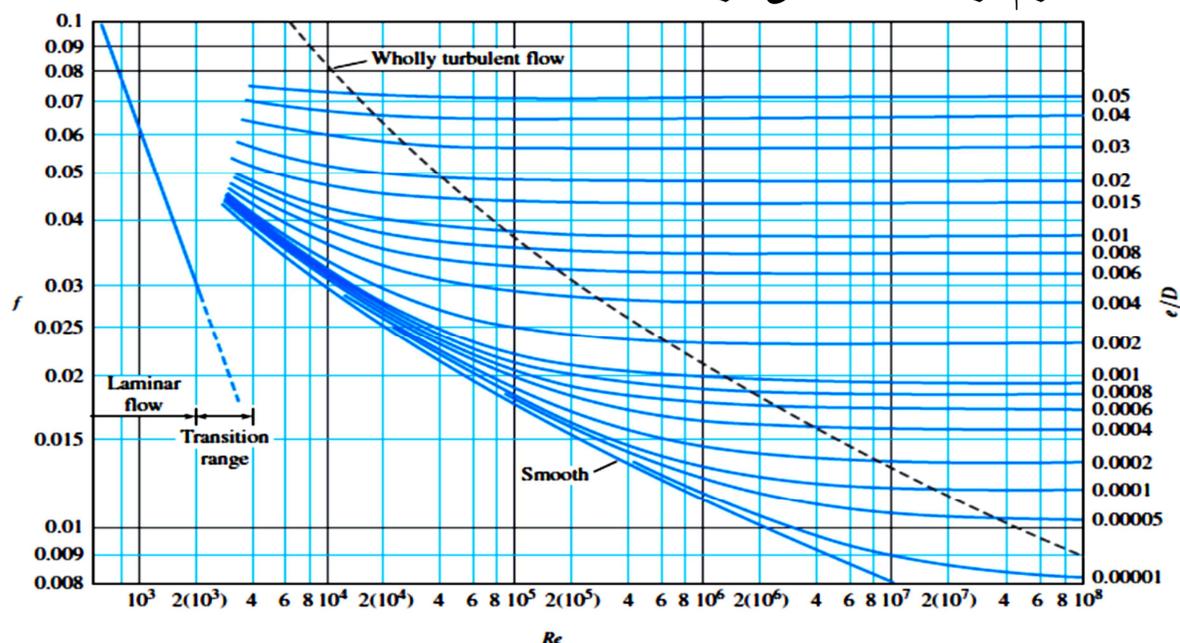
$$\Delta P = g(\rho, \mu, V, D, \varepsilon) \xrightarrow{\text{Dimensional Analysis}} \Delta P = \varphi\left(\frac{L}{D}, \text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right) = \frac{L}{D} \cdot \phi\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

- به جای تابع  $\phi$ ، ضریبی به نام ضریب اصطکاک ( $f$ ) در نظر می گیریم

$$f = \phi\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

## محاسبه افت فشار در لوله ها

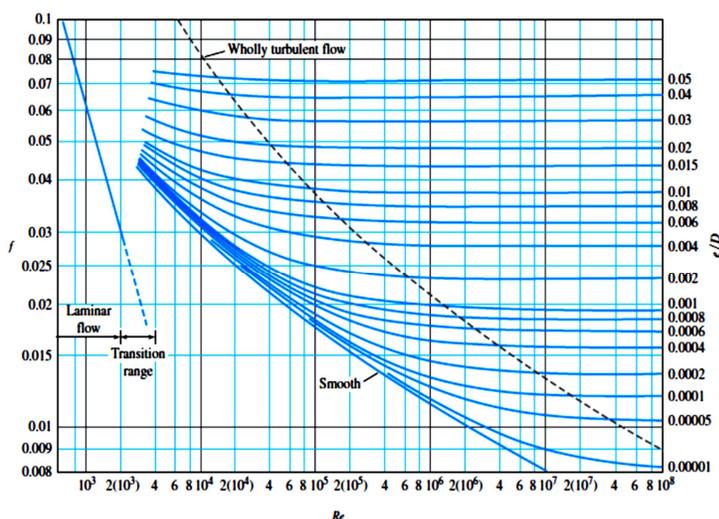
- رابطه بین ضریب اصطکاک، عدد رینولدز و زبری نسبی به کمک نموداری به با دیاگرام مودی نشان داده می شود.



## محاسبه افت فشار در لوله ها

- دیاگرام مودی براساس معادله کلبروک رسم شده است. از این معادله به کمک حدس و خطا می توان استفاده کرد.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left( \frac{\varepsilon / D}{3.7} + \frac{2.523}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$



35

## محاسبه افت فشار در لوله ها

- در بسیاری از این مسائل می توان از رابطه زیر مقدار  $f$  را محاسبه کرد (بدون نیاز به حدس و خطا).

$$f = \frac{1.325}{\left[ \ln \left( \frac{\varepsilon / D}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \right]^2} \quad 10^{-6} \leq \varepsilon / D \leq 10^{-2}$$

$$5 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 10^8$$

- نکته: در صورتی که سطح مقطع به شکل دایره نباشد (کانال)، در تمام محاسبات به جای قطر ( $D$ ) باید از قطر هیدرولیکی ( $D_H$ ) استفاده کرد:

$$D_H = \frac{4A}{P}$$

که در این رابطه،  $A$  سطح مقطع عبور سیال و  $P$  محیط ناحیه خیس شده می باشد.

36

## محاسبه افت فشار در لوله ها

▪ به طور کلی، در مورد افت فشار (هد) اصطکاکی در لوله ها سه دسته از مسائل ممکن است وجود داشته باشد:

خواسته های مسئله	معلومات مسئله	
$h_f$	$\varepsilon, D, Q$	۱
$Q$	$h_f, \varepsilon, D$	۲
$D$	$h_f, \varepsilon, Q$	۳

▪ حالت اول بدون نیاز به تکرار و به راحتی قابل محاسبه است. اما مسائل نوع ۲ و ۳ نیاز به تکرار محاسبات تا زمان همگرا شدن جواب و حدس دارند.

## محاسبه افت فشار در لوله ها

▪ معادلات زیر توسط سوامی و جین (Swamee & Jain) برای حل سه نوع مسئله گفته شده ارائه شده اند (بدون نیاز به حدس و خطا).

$$h_f = 1.07 \frac{Q^2 L}{g D^5} \left\{ \ln \left[ \frac{\varepsilon / D}{3.7} + 4.62 \left( \frac{\nu D}{Q} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2}$$

$$10^{-5} < \varepsilon / D < 10^{-2}$$

$$10^3 < Re < 3 \times 10^8$$

$$Q = -0.965 \left( \frac{g D^5 h_f}{L} \right)^{0.5} \ln \left[ \frac{\varepsilon / D}{3.7} + \left( \frac{3.17 \nu^2 L}{g D^3 h_f} \right)^{0.5} \right]$$

$$Re > 2100$$

$$D = 0.55 \left[ \varepsilon^{1.25} \left( \frac{L Q^2}{g h_f} \right)^{4.75} + \nu Q^{9.4} \left( \frac{L}{g h_f} \right)^{5.2} \right]^{0.03}$$

$$10^{-5} < \varepsilon / D < 10^{-2}$$

$$10^3 < Re < 3 \times 10^8$$

## محاسبه افت فشار در لوله ها

▪ مثال: آب در دمای ۲۰ درجه سانتیگراد در یک لوله با طول ۵۰۰ متر و شعاع ۲ سانتی متر در جریان است ( $Q=0.003 \text{ m}^3/\text{s}$ ). در صورتی که مقدار زبری لوله برابر با  $0.046 \text{ mm}$  باشد (لوله آهنی)، میزان افت فشار در لوله بر اثر اصطکاک را به دست آورید.

حل: با توجه به داده های مسئله

$$\text{water } 20^\circ \text{C} \quad \varepsilon = 0.046 \text{ mm}$$

$$L = 500 \text{ m} \quad Q = 0.003 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D = 4 \text{ cm} \quad \Delta p = ? \quad (\text{مسئله نوع})$$

ابتدا باید نوع رژیم جریان را با توجه به عدد رینولدز تعیین کنیم:

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu}$$

(جریان)

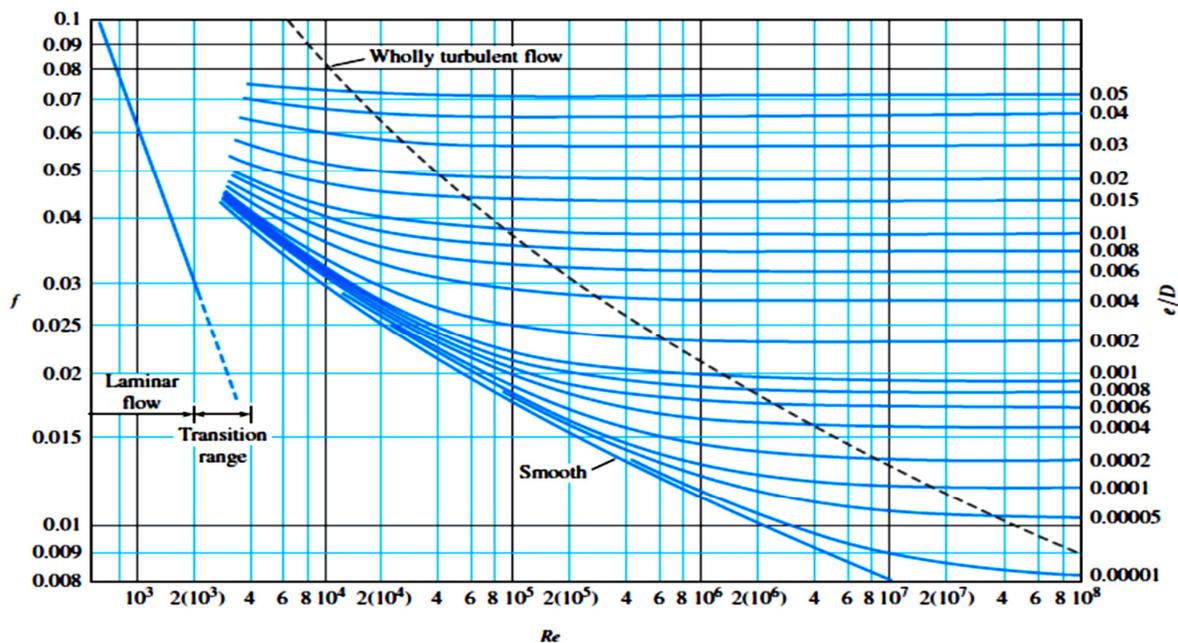
با توجه به مقادیر  $\varepsilon$  و  $D$  داریم:

$$\frac{\varepsilon}{D} =$$

39

## محاسبه افت فشار در لوله ها

▪ با استفاده از دیاگرام مودی، مقدار تخمینی  $f$  برابر است با



## محاسبه افت فشار در لوله ها

در نتیجه می توان افت هد را به کمک رابطه داری-ویسباخ به دست آورد.

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

برای محاسبه افت فشار می توان به شکل زیر عمل کرد:

$$\Delta p = \gamma h_f$$

41

## محاسبه افت فشار در لوله ها

در صورتی که برای حل مسئله از معادله صریح استفاده کنیم:

$$h_f = 1.07 \frac{Q^2 L}{g D^5} \left\{ \ln \left[ \frac{\varepsilon / D}{3.7} + 4.62 \left( \frac{\nu D}{Q} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2} \quad \begin{array}{l} 10^{-5} < \varepsilon / D < 10^{-2} \\ 10^3 < Re < 3 \times 10^8 \end{array}$$

$$= 1.07 \frac{0.003^2 \times 500}{9.81 \times (0.04)^5} \left\{ \ln \left[ \frac{0.00115}{3.7} + 4.62 \left( \frac{10^{-6} \times 0.04}{0.003} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2}$$

$$= 1.07 \times 4480 \times 0.01731 = 83 \text{ m}$$

این مقدار تقریباً با مقدار به دست آمده از نمودار مودی یکسان است.

42

## محاسبه افت فشار در لوله ها

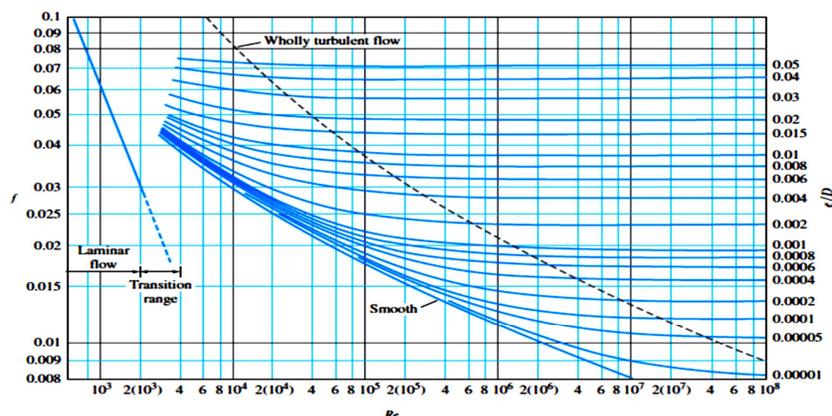
▪ جریان نفت با چگالی ۰/۹ و ویسکوزیته سینماتیک  $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  در طول یک لوله افقی آهنی با طول ۳۰۰ متر و قطر ۱۰ cm انتقال یافته و افت فشاری برابر با  $\text{kPa}$  ۷۰۰ ایجاد می کند. مطلوبست تعیین شدت جریان نفت.

حل: با توجه به داده های داده شده می توان گفت **مسئله از نوع** است.

$$\frac{\varepsilon}{D} =$$

زبری نسبی برابر است با

با فرض جریان درهم:



43

## محاسبه افت فشار در لوله ها

▪ مقدار افت هد ( $h_f$ ) به شکل زیر به دست می آید:

$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

▪ با مرتب کردن معادله دارسی-ویسباخ، سرعت نیز به شکل زیر تعیین می شود:

$$V = \left( \frac{2gDh_f}{fL} \right)^{1/2}$$

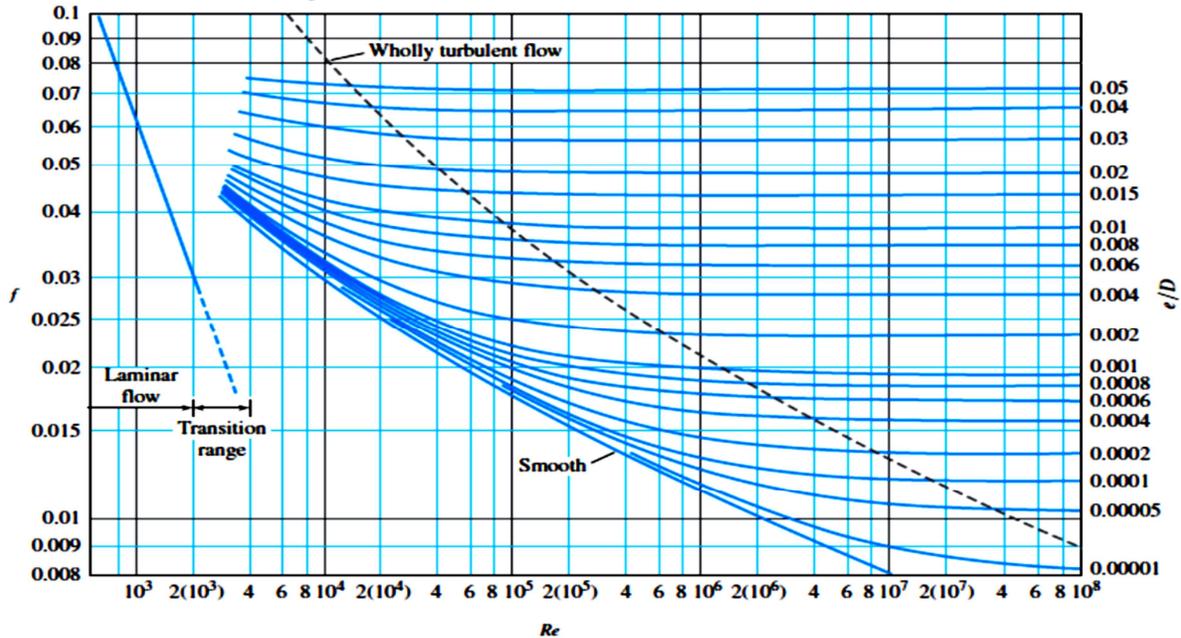
▪ در نتیجه عدد  $\text{Re}$  را می توان به دست آورد:

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu}$$

44

## محاسبه افت فشار در لوله ها

با استفاده از عدد  $Re$  و  $\epsilon/D=0.00046$  و از روی نمودار مودی می توان گفت:



45

## محاسبه افت فشار در لوله ها

مقدار قبلی  $f$  تصحیح شده و مجدداً سرعت از طریق رابطه زیر به دست می آید:

$$V = \left( \frac{2gDh_f}{fL} \right)^{1/2}$$

بنابراین مقدار  $Re$  برابر است با:

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

با توجه به  $Re$  جدید، از روی دیاگرام مودی داریم:

بنابراین شدت جریان برابر است با:

$$Q = VA =$$

46

## محاسبه افت فشار در لوله ها

در صورتی که برای حل مسئله از معادله صریح استفاده کنیم:

$$Q = -0.965 \left( \frac{gD^5 h_f}{L} \right)^{0.5} \ln \left[ \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \left( \frac{3.17v^2 L}{gD^3 h_f} \right)^{0.5} \right] \quad \text{Re} > 2100$$
$$= -0.965 \left( \frac{9.8 \times 0.1^5 \times 79.4}{300} \right)^{0.5} \ln \left[ \frac{0.00046}{3.7} + \left( \frac{3.17 \times 10^{-10} \times 300}{9.8 \times 0.1^3 \times 79.4} \right)^{0.5} \right]$$
$$= -0.965 \times 5.096 \times 10^{-3} \times (7.655) = 0.038 \text{ m}^3/\text{s}$$

در مقایسه با عدد به دست آمده از نمودار مودی، این عدد قابل قبول است.

47

## محاسبه افت فشار در لوله ها

تمرین: می خواهیم  $0.002 \text{ m}^3/\text{s}$  آب (با دمای  $20^\circ\text{C}$ ) را از لوله ای به طول  $400 \text{ m}$  به گونه ای انتقال دهیم که افت هد اصطکاکی از  $30 \text{ m}$  بیشتر نشود. قطر لوله چه مقدار باید باشد ( $\varepsilon = 1.51 \times 10^{-6} \text{ m}$ )؟

48



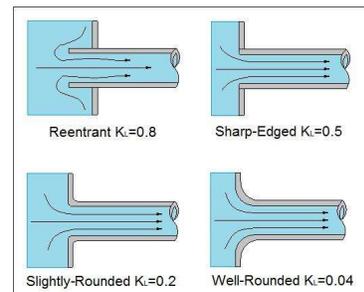
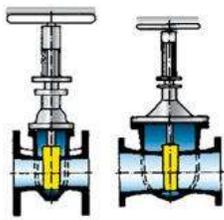
## افت های موضعی در خط لوله

# Minor Losses in Pipe Flow

### افت های موضعی

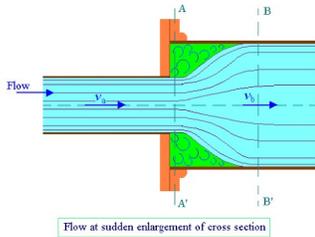
- در جلسه قبل، میزان افت فشار ناشی از اصطکاک در طول لوله مورد بررسی قرار گرفت. علاوه بر عامل اصطکاکی طول لوله، عوامل دیگری نیز در خط لوله باعث از دست رفتن انرژی سیال و افت فشار آن می شوند.
- سیستم های لوله کشی شامل مواردی از قبیل **شیرها، زانویی ها، تغییر اندازه لوله** و ... می باشند که این عوامل باعث افت انرژی سیال می گردند. به افت های ناشی از این عوامل **افت های موضعی** گفته می شود.

$$h_f = K \frac{V^2}{2g}$$

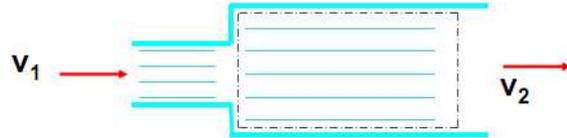


## افت فشار در انبساط ناگهانی

- تنها حالتی که می توان افت فشار را به صورت تحلیلی (با استفاده از فرمول) به دست آورد، حالتی است که افت فشار (هد) ناشی از تغییر اندازه لوله باشد.



Flow at sudden enlargement of cross section



$$\sum F = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

$$(P_1 - P_2)A_2 = \rho A_2 V_2 (V_2 - V_1) \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho} = V_2 (V_2 - V_1)$$

- از طرف دیگر، با استفاده از معادله انرژی می توان نوشت

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + Z_2 - Z_1 = h - h_f \Rightarrow h_f = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{V_2(V_2 - V_1)}{g} - \frac{(V_2 + V_1)(V_2 - V_1)}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

51

## افت فشار در انقباض و انقباض ناگهانی

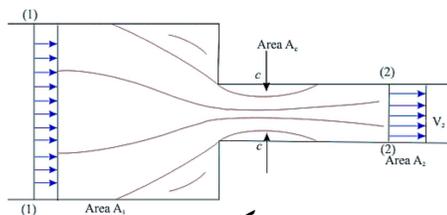
- از سوی دیگر با استفاده از معادله پیوستگی داریم

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 V_1$$

$$h_f = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \Rightarrow h_f = \left[ 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

- برای تعیین میزان افت فشار در اثر انقباض ناگهانی، از رابطه زیر استفاده می شود:

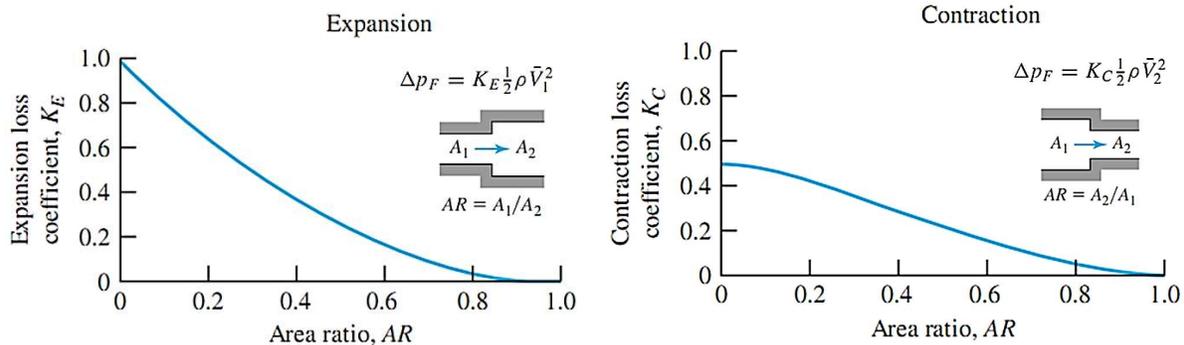
$$\Delta p_F = K_C \frac{1}{2} \rho \bar{V}_2^2$$



که به  $K_C$  ضریب افت انقباضی گفته می شود.

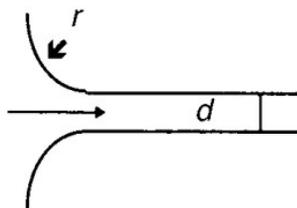
52

## افت فشار در انقباض و انبساط ناگهانی



▪ برای حالت های دیگر، برای تعیین مقدار ضریب افت فشار از روابط و داده های تجربی استفاده می شود.

## افت فشار در انقباض و انبساط تدریجی



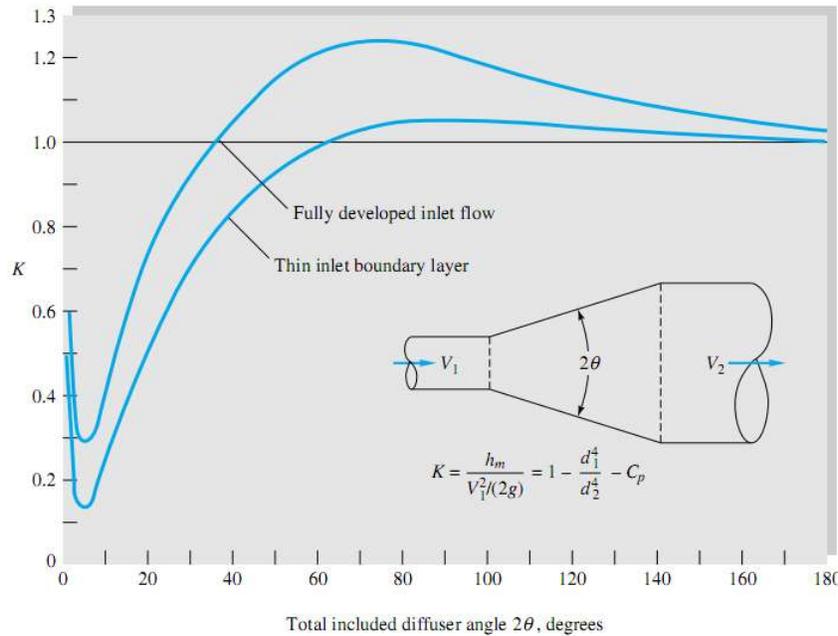
$r/d$	$K_c$
0.0 (sharp)	0.5
0.02	0.28
0.04	0.24
0.06	0.15
0.10	0.09
0.15 & up	0.04

### Loss Coefficients (K) for Gradual Contractions: Round and Rectangular Ducts

$A_2/A_1$	Included Angle, $\theta$ , Degrees						
	10	15–40	50–60	90	120	150	180
0.50	0.05	0.05	0.06	0.12	0.18	0.24	0.26
0.25	0.05	0.04	0.07	0.17	0.27	0.35	0.41
0.10	0.05	0.05	0.08	0.19	0.29	0.37	0.43

Note: Coefficients are based on  $h_{lm} = K(\bar{V}_2^2/2)$ .

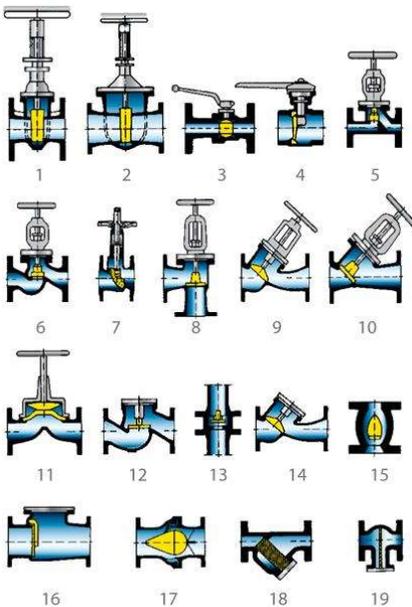
## افت فشار در انبساط تدریجی



$$h_f = K \frac{V^2}{2g}$$

$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho V_1^2}$$

## افت موضعی در شیرها



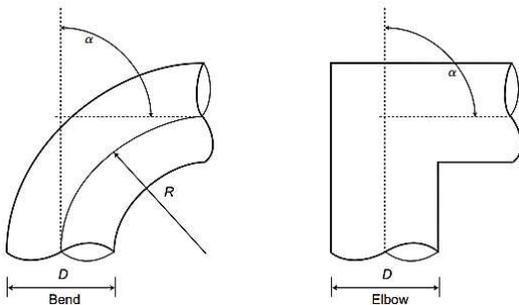
No	Type of valve	A coefficient of minor loss
1	Globe valve, fully open	10
2	Angle valve, fully open	2
3	Gate valve, fully open	0,15
4	Valve gate, ¼ closed	0,26
5	Gate valve, ½ closed	2,1
6	Gate valve, ¾ closed	17
7	Fully open ball valve	0,05
8	Gate valve, ⅓ closed	5,5

## افت موضعی در خم و زانویا



57

## افت موضعی در خم و زانویا



$$h_f = K \frac{V^2}{2g}$$

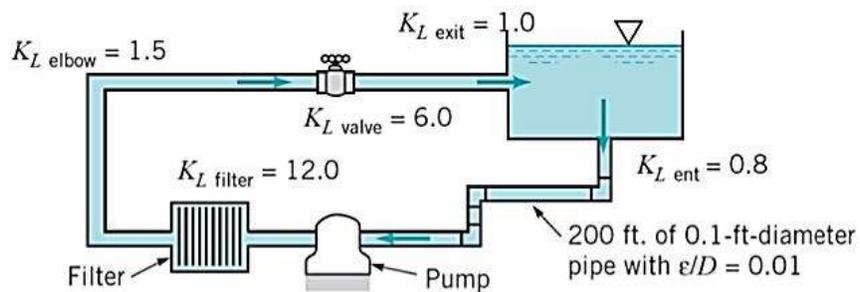
Minor loss factors for elbows and bends

Deflection angle, $\alpha$ (°)	15	30	45	60	90
Bends, $R/D = 1$	0.05	0.09	0.13	0.16	0.21
Bends, $R/D = 2$	0.04	0.07	0.10	0.12	0.15
Bends, $R/D = 3$	0.03	0.05	0.08	0.09	0.12
Bends, $R/D = 4$	0.02	0.04	0.06	0.07	0.09
Elbows	0.06	0.13	0.25	0.50	1.20

58

## افت های موضعی

- برای سیستمی که طول آن در حدود ۵۰ برابر قطر لوله باشد، افت فشارهای موضعی و افت فشار اصطکاکی خود لوله تقریباً با هم برابر هستند.
- برای سیستمی با طول خیلی زیاد (حدود ۱۰۰ برابر قطر لوله)، افت های موضعی عموماً قابل صرف نظر هستند.
- برای سیستمی با طول کوتاه، افت های موضعی عامل اصلی افت فشار جریان می باشند.



## مجاری غیردایره ای

## Non-circular ducts

## مقدمه

▪ در حالتی که سطح مقطع جریان به صورت دایره نباشد، مجرای حرکت سیال از نوع کانال (duct) خواهد بود. در این صورت، باز هم می توان از روابط مربوط به کانال های دایره ای استفاده کرد. فقط باید از مفهومی به نام قطر هیدرولیکی استفاده شود.

▪ قطر هیدرولیکی به شکل زیر تعریف می شود

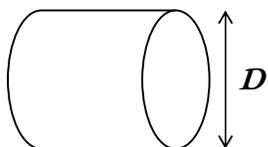
$$D_H = 4 \frac{A}{P}$$

که در آن،  $A$  مساحت سطح مقطع و  $P$  محیط ناحیه تر شده توسط سیال می باشد.

برای تعیین افت اصطکاکی در مجاری غیردایره ای، از رابطه دارسی-وایسباخ استفاده کرده و به جای قطر، از قطر هیدرولیکی استفاده می کنیم:

$$h_f = f \frac{L}{D_H} \frac{V^2}{2g}$$

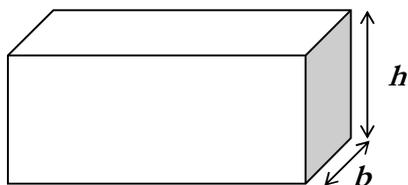
## قطر هیدرولیکی



▪ برای لوله با سطح مقطع دایره ای داریم

$$A = \pi \frac{D^2}{4} \quad ; \quad P = \pi D \quad \Rightarrow \quad D_H = 4 \frac{A}{P} = 4 \times \frac{\pi \frac{D^2}{4}}{\pi D} = D$$

▪ برای مستطیلی با ابعاد  $b$  و  $h$



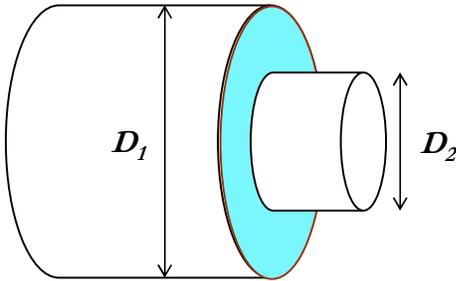
$$A = bh \quad ; \quad P = 2(b+h)$$

$$\Rightarrow D_H = 4 \frac{A}{P} = 4 \times \frac{bh}{2(b+h)} = \frac{2bh}{b+h}$$

## قطر هیدورلیکی

▪ برای جریان از بین دو لوله هم محور با قطر بزرگ  $D_1$  و قطر کوچک  $D_2$

(جریان از بین دو لوله در ناحیه آبی رنگ عبور می کند)



$$A =$$

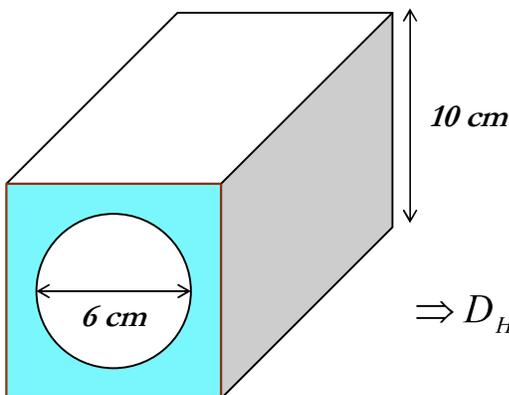
$$P =$$

$$\Rightarrow D_H = 4 \frac{A}{P} =$$

63

## مثال

در کانال مقابل، آب از فضای بین استوانه و مربع با سرعت  $4 \text{ cm/sec}$  عبور می کند. میزان افت هد اصطکاکی در طول  $200$  متر از این کانال را به دست آورید.



حل: جریان از ناحیه آبی رنگ عبور می کند.

در نتیجه:

$$\Rightarrow D_H = 4 \frac{A}{P} =$$

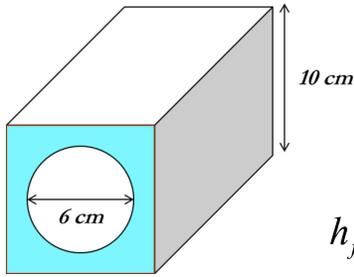
$$\text{Re} = \frac{\rho V D_H}{\mu} = \frac{1000 \times 0.04 \times 0.049}{10^{-3}} = 1960 < 2300$$

جریان آرام

64

## مثال

در نتیجه

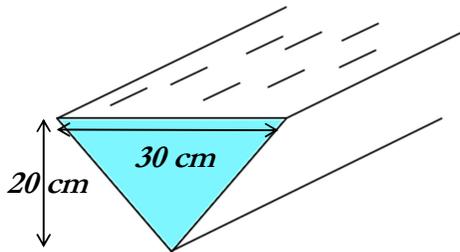


$$f =$$

$$h_f = f \frac{L}{D_H} \frac{V^2}{2g}$$

مثال: آب در شرایط استاندارد از یک کانال آهنی روباز افقی و صاف به طول ۵۰۰ m و مقطع مثلثی با قاعده ۳۰ cm و ارتفاع ۲۰ cm با شدت جریان  $0.24 \text{ m}^3/\text{sec}$  انتقال می یابد. مطلوبست تعیین افت فشار اصطکاکی در درون کانال.

حل:



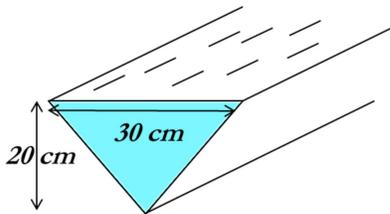
$$A =$$

$$P =$$

65

## مثال

در نتیجه



$$\Rightarrow D_H = 4 \frac{A}{P} =$$

برای تعیین سرعت متوسط جریان داریم

$$V = \quad \Rightarrow \text{Re} = \frac{VD_H}{\nu} =$$

پس برای تعیین  $f$  باید از دیاگرام مودی استفاده شود.

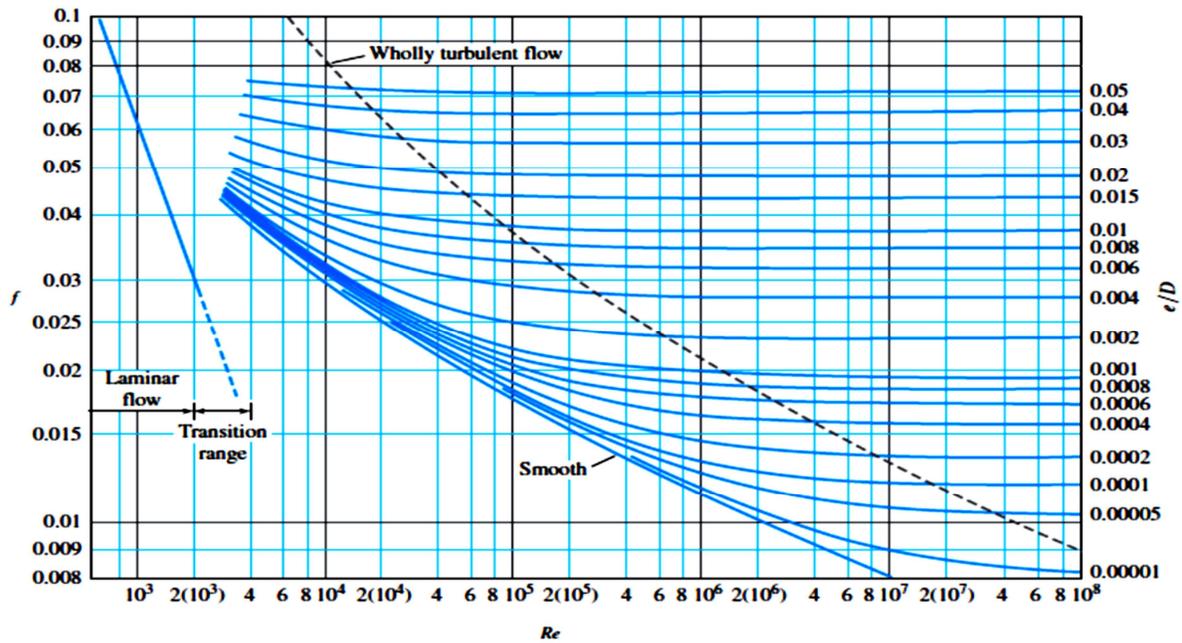
با توجه به جنس کانال (آهن:  $\epsilon = 0.046 \text{ mm}$ )

$$\frac{\epsilon}{D_H} =$$

66

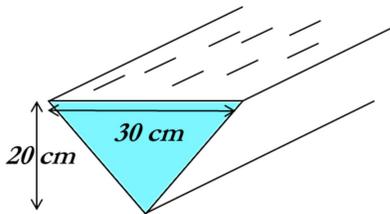
## مثال

در نتیجه



## مثال

پس خواهیم داشت



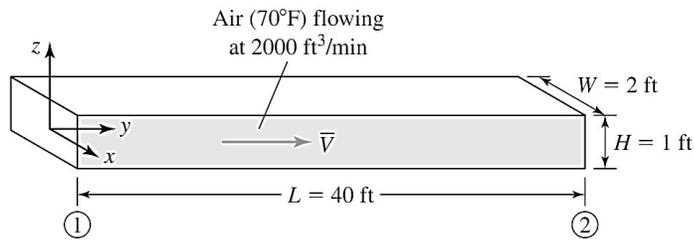
$$h_f = f \frac{L}{D_H} \frac{V^2}{2g} = 0.014 \times \frac{500}{0.24} \frac{8^2}{2 \times 9.81}$$

در نتیجه افت فشار برابر خواهد بود با

$$\Delta P_f = \rho_w g h_f$$

## مثال

جریان هوا با شدت  $2000 \text{ ft}^3/\text{min}$  در دمای  $70^\circ\text{F}$  و فشار اتمسفریک در یک کانال افقی از جنس چدن ( $\epsilon=0.26 \text{ mm}$ ) با طول  $40 \text{ ft}$  جریان دارد. اگر سطح مقطع کانال به شکل مستطیل با ابعاد  $1 \text{ ft}$  و  $2 \text{ ft}$  باشد، میزان افت فشار را تعیین کنید.



حل: قبلاً برای کانال مستطیلی دیدیم

$$D_H = 4 \frac{A}{P} = \frac{2bh}{b+h}$$

برای سرعت متوسط جریان داریم

$$\bar{V} =$$

69

## مثال

پس داریم

$$\text{Re} = \frac{\bar{V} D_H}{\nu} =$$

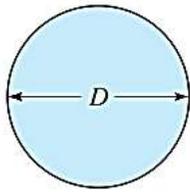
$$\frac{\epsilon}{D_H} =$$

در ادامه با استفاده از رابطه داریسی-ویسباخ می توان نوشت

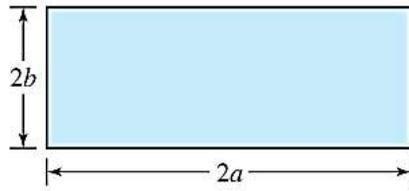
$$h_f = f \frac{L}{D_H} \frac{V^2}{2g}$$

70

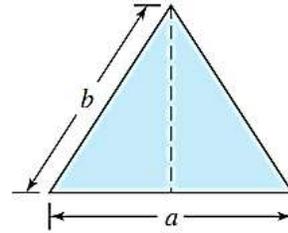
## جمع بندی



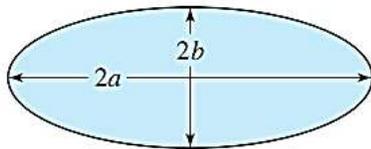
$$D_H = D$$



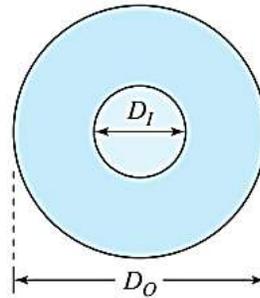
$$D_H = \frac{4ab}{a + b}$$



$$D_H = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - a^4}}{a + 2b}$$



$$D_H \approx \frac{2\sqrt{2}(ab)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$D_H = D_0 - D_1$$